ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ
по дисциплине «Математика»

дата 20.11.2024

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Тема: «Непрерывность функции. Метод интервалов»

Определение: Функция называется непрерывной в точке x_0, если f(x) стремится к $f(x_0)$ при стремлении x к x_0. При этом $f(x) - A = f(x) - f(x_0) = \Delta f$. Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого промежутка А, то эта функция будет являться непрерывной на всем промежутке А. А сам промежуток А, называют в таком случае **промежутком непрерывности** функции f.

Пример:

Является ли функция f непрерывной в точках $x_1=0$ и $x_2=-1$, если:

а) $f(x)=x^4-x+1$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при } x\leqslant -1, \\ x^2-x & \text{при } x>-1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{при } x<0, \\ 5-2x & \text{при } x\geqslant 0; \end{cases}$ г) $f(x)=2x-x^2+x^3$?

Решение:

а) в точке x_1-непрерывна, в x_2-непрерывна

б) в точках x_1 непрерывна, в точке x_2 –не является непрерывной

в) в точке x_1-не является непрерывной, в x_2–непрерывна

г) непрерывна в x_1 и x_2

Свойство непрерывных функций: Если на некотором интервале (a;b) функция f непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она будет сохранять постоянный знак.

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

Метод интервалов

Метод интервалов — это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида f (x) > 0 и f (x) < 0.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

1 шаг. Перенести все части неравенства в одну сторону так, чтобы с другой остался только 0.
2 шаг. Найти нули функции, для этого необходимо решить уравнение f(x) = 0.
3 шаг. Начертить числовую прямую и отметить на ней все полученные корни. Таким образом, числовая прямая разобьется на интервалы.
4 шаг. Определить знаки на каждом интервале. Для этого необходимо подставить любое удобное значение в f(x) и определить, какой знак будет иметь функция на данном интервале.

Пример: решить неравенство $x^2-5x+4 \geq 0$

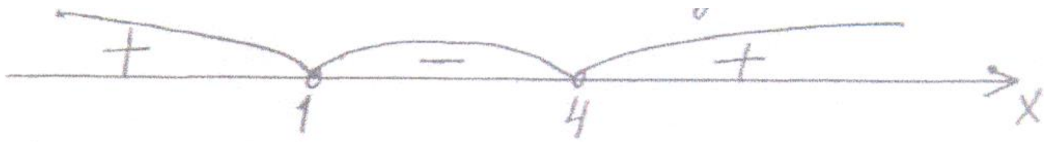
$$x^2-5x+4=0$$

$$D = в^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9;$$

$$\sqrt{D = \sqrt{9}} = 3.$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$



Чтобы определить знак функции на интервалах, достаточно определить знак на одном из интервалов, а дальше будет идти чередование знаков. Например, определим знак в крайнем правом интервале. Для этого возьмем любое число из этого интервала, большее 4, и подставим его в первоначальную функцию в левой части неравенство. В данном случае можно взять, например, число x=5.

5^2-5·5+4= 25-25+4= 4>0

Получим число положительное, поэтому в крайнем правом интервале ставим знак плюс +.
Тогда в оставшихся двух интервалах знаки будут чередоваться. В ответ выпишем те интервалы, на которых функция имеет знак плюс +, т.к. наше неравенство было со знаком больше нуля (>0).

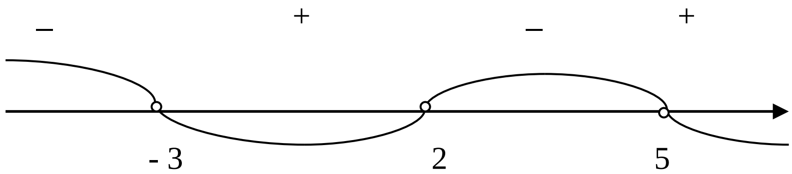
Ответ: $(-\infty;1)\cup(4;\infty)$.

Пример: решить неравенство (x+3)(x-2)(x-5)>0

(x+3)(x-2)(x-5)=0,

x= - 3, x= 2, x = 5.

Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки внутри каждого из которых функция сохраняет свой знак.



Берем любое число в правом крайнем интервале:

f(6)= (6+3)(6-2)(6-5) > 0,

f(x)>0 при x∈ (- 3;2)∪(5;+∞).

Ответ: (- 3;2)∪(5;+∞).

Пример: решить неравенство: $\frac{x^2-7x+6}{x-2} \le 0$

Найдем точки, в которых наша функция не имеет никакого знака, т.е. равна нулю:

$$\begin{cases} x^2-7x+6=0 \\ x-2\ne 0 \end{cases}$$

Решим отдельно каждое из данных двух уравнений.

x^2-7x+6=0,

D=$в^2-4ac=7^2-4\cdot 1\cdot 6=49-24=25;$

$\sqrt{D}=\sqrt{25}=5.$

$x_1=\frac{7+5}{2}=\frac{12}{2}=6;$

$x_2=\frac{7-5}{2}=\frac{2}{2}=1;$

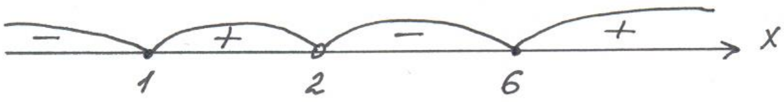
Решим второе уравнение:

$x-2\ne 0$

$x\ne 2$

Отметим полученные числа 6;1 и 2 на числовой прямой.

Числа 1 и 6 отметим сплошными точками, т.к. неравенство у нас нестрогое (≤ 0), а число 2 отметим пустой точкой, потому что в ней дробь не имеет смысла, так как в этой точке знаменатель равен нулю.

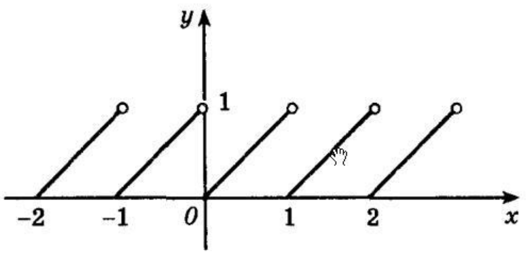


Определим знак функции на одном из интервалов, например, в крайнем левом. Для этого возьмем из этого интервала число, расположенное левее числа 1, например, число 2.
Подставим число 2 вместо x в нашу функцию, т.е. в дробь, стоящую в левой части неравенства:
$\frac{0^2-7\cdot 0+6}{0-2}=\frac{0+0+6}{-2}=\frac{6}{-2}=-3<0.$
Получим число -3. Поэтому в крайнем левом интервале ставим знак минус, а дальше по интервалам будет идти чередование знаков. В ответ выписываем интервалы со знаком минус, тюк. Наше неравенство имело знак ≤ 0.

Ответ: $(-\infty;1]\cup(2;6]$.

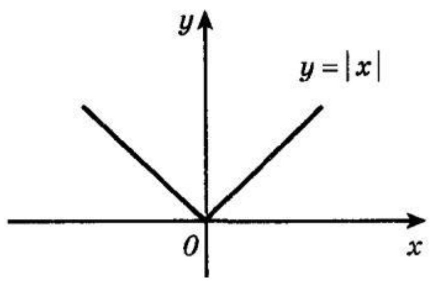
Пример функции, которая не является непрерывной

До сих пор мы сталкивались только с непрерывными функциями. Но существуют функции, которые не являются непрерывными в каждой точке, в которой они определены. Например, функция f(x) = {x}, где {x} – есть дробная часть числа x. Её график изображен на следующем рисунке.



Легко заметить, что основное свойство непрерывности функции в точке x_0 равное любому целому числу, не будет выполняться. Но в тоже время функция f(x) = {x} непрерывна во всех других точках, на которых она определена, кроме точек, где x равно целому числу. На графике такие точки отмечены выколотыми кружками.

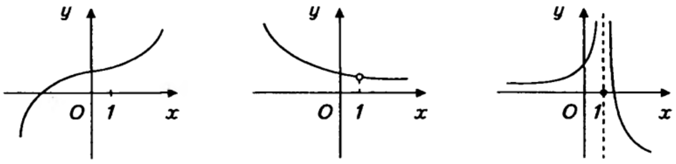
Функции непрерывные, но не дифференцируемые в данной точке



Есть функции, которые являются непрерывными в каждой точке своей области определения. Но при этом не будут иметь производные в некоторых точках. Например, функция y=|x| непрерывна на все числовой оси, но при этом не дифференцируема в точке x = 0.

Домашнее задание:

1	**Установите истинность или ложность следующих утверждений:** **а) Функция $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ непрерывна на всем множестве R.** ______________________________ **б) График функции $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывен на множестве R.** ______________________________

2	**Укажите функции, непрерывные в точке $x = 1$, если их графики имеют следующий вид. Верный ответ подчеркните.**  **а)** **б)** **в)**
3	**Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x}}$.**

Конспект и задания отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru